Nicolaus-Cusanus-Gymnasium
Schulinterner Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe - Einführungsphase

Mathematik

Version 3.0
Stand: 31.10.2018

Inhalt

1 Die Fachgruppe Mathematik am Nicolaus-Cusanus-Gymnasium

Das Nicolaus-Cusanus-Gymnasium (NCG) ist ein Gymnasium mit bilingualem deutsch-englischem Bildungsgang und mathematisch-naturwissenschaftlichem Schwerpunkt in der Trägerschaft der Stadt Bonn. Neben weiteren städtischen Gymnasien/ Gesamtschulen sind im Umfeld mehrere private Gymnasien angesiedelt. Das NCG hat eine entsprechend heterogene Schülerschaft, was den sozialen und ethnischen Hintergrund betrifft. Das NCG ist in der Sekundarstufe I dreizügig und wird als Offene Ganztagsschule geführt.

In die Einführungsphase der Sekundarstufe II wurden in den letzten Jahren regelmäßig 20 - 30 Schülerinnen und Schüler neu aufgenommen, überwiegend aus Haupt- und Realschulen der Stadt Bonn, die auf die parallelen Kurse gleichmäßig verteilt werden.

In der Regel werden in der Einführungsphase vier parallele Grundkurse eingerichtet, aus denen sich für die Qualifizierungsphase ein Leistungs- und drei Grundkurse entwickeln.

Der Unterricht findet im Doppelstunden-Modell statt, die Kursblockung sieht grundsätzlich für Grundkurse eine, für Leistungskurse zwei Doppelstunden vor.

Den im Schulprogramm ausgewiesenen Zielen, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu bieten, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik in besonderer Weise verpflichtet:

Durch ein fachliches Förderprogramm unter Einbeziehung von Schülerinnen und Schülern als Tutoren, begleitet durch regelmäßige Sprechstunden der Lehrkräfte und dort getroffene Lernvereinbarungen, werden Schülerinnen und Schüler mit Übergangs- und Lernschwierigkeiten intensiv unterstützt.

Schülerinnen und Schüler aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme an Känguru-Wettbewerb und der Mathematik-Olympiade im Fach Mathematik angehalten und, wo erforderlich, begleitet.

Für den Fachunterricht aller Stufen besteht Konsens darüber, dass wo immer möglich mathematische Fachinhalte mit Lebensweltbezug vermittelt werden.

In der Sekundarstufe I wird ein wissenschaftlicher Taschenrechner ab Klasse 7 verwendet, dynamische Geometrie-Software und Tabellenkalkulation werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt, der Umgang mit ihnen eingeübt. Dazu stehen in der Schule vier PC-Unterrichtsräume zur Verfügung. In der Sekundarstufe II kann deshalb davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler mit den grundlegenden Möglichkeiten dieser digitalen Werkzeuge vertraut sind.

Der grafikfähige Taschenrechner wird am Ende der Jahrgangsstufe 9 eingeführt. Die Fachkonferenz Mathematik hat sich für die Nutzung eines grafikfähigen Taschenrechners ohne CAS ausgesprochen und sich für den Einsatz des GTR-Modells der Firma Texas Instrument "TI-Nspire CX" (ohne CAS) entschieden. Die Schule empfiehlt die Anschaffung dieses Rechnermodells. Die Möglichkeit zur Nutzung von Computer-Algebra-Systems (CAS) auf Tablets, Laptops und Computern anstelle von Taschenrechnern besteht zur Zeit nicht. Die in der Sekundarstufe II neu in das NCG aufgenommenen Schülerinnen und Schüler verfügen in der Regel noch nicht über einen GTR.

2 Entscheidungen zum Unterricht

2.1 Unterrichtsvorhaben

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Schülerinnen und Schülern Lerngelegenheiten zu ermöglichen, so dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

Im „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.1) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich, allerdings ist die zeitliche Abfolge der Unterrichtsvorhaben der Einführungsphase jeweils auf die Vorgaben zur Vergleichsklausur abzustimmen.

Das Übersichtsraster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen“ an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene konkretisierter Unterrichtsvorhaben Berücksichtigung finden. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Schülerinteressen oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Während der Fachkonferenzbeschluss zum „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechslern und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz Bindekraft entfalten soll, besitzt die Ausweisung „konkretisierter Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.2) empfehlenden Charakter. Referendarinnen und Referendaren sowie neuen Kolleginnen und Kollegen dienen diese vor allem zur standardbezogenen Orientierung in der neuen Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen Absprachen zu didaktisch-methodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen, die im Einzelnen auch den Kapiteln 2.2 bis 2.4 zu entnehmen sind. Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

2.1.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<table>
<tr><th colspan="2">Einführungsphase</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben I:</u>

Thema:
Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen (E-S1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Mehrstufige Zufallsexperimente

Zeitbedarf: 9 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben II:</u>

Thema:
Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten - Mehrfeldertafeln (E-S2)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Kommunizieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Zeitbedarf: 9 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben III:</u>

Thema:
Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen

Zeitbedarf: 18 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u>

Thema:
Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs

Zeitbedarf: 12 Std.</td></tr>
</table>

Einführungsphase Fortsetzung	
Unterrichtsvorhaben V: **Thema:** *Von den Potenzfunktionen zu den ganzrationalen Funktionen (E-A3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Argumentieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen **Zeitbedarf:** 12 Std.	*Unterrichtsvorhaben VI:* **Thema**: *Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Argumentieren **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen **Zeitbedarf**: 12 Std.
Unterrichtsvorhaben VII: **Thema**: *Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes (E-G1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Koordinatisierungen des Raumes **Zeitbedarf**: 6 Std.	*Unterrichtsvorhaben VIII:* **Thema**: *Vektoren bringen Bewegung in den Raum (E-G2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Vektoren und Vektoroperationen **Zeitbedarf**: 9 Std.
Summe Einführungsphase: 87 Stunden	

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

E-Phase		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	E-S1	9
II	E-S2	9
III	E-A1	18
IV	E-A2	12
V	E-A3	12
VI	E-A4	12
VII	E-G1	6
VIII	E-G2	9
	Summe:	87

2.1.2 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Themen, Inhaltsfelder, inhaltliche Schwerpunkte und Kompetenzen hat die Fachkonferenz des Nicolaus-Cusanus-Gymnasiums verbindlich vereinbart. In allen anderen Bereichen sind Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bei der Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben möglich.

Darüber hinaus enthält dieser schulinterne Lehrplan in den Kapiteln 2.2 bis 2.4 übergreifende sowie z.T. auch jahrgangsbezogene Absprachen zur fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit, zur Leistungsbewertung und zur Leistungsrückmeldung. Je nach internem Steuerungsbedarf können solche Absprachen auch vorhabenbezogen vorgenommen werden.

Einführungsphase Funktionen und Analysis (A)

Thema: *Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten sowie quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen • beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen • wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (Sinusfunktion, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen) an und deuten die zugehörigen Parameter **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung*(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Tabellenkalkulation, Funktionenplotter und grafikfähige Taschenrechner • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen	Zielsetzung dieses Unterrichtsvorhabens ist die Erweiterung der bereits aus dem Unterricht der SI bekannten linearen und quadratischen Funktionen um die Klassen der ganzzahligen Potenzfunktionen, der Wurzelfunktionen (quadratischen und kubischen Wurzelfunktion) und der Exponentialfunktionen sowie der Sinusfunktion. Dabei stehen das Erkunden und Beschreiben von Eigenschaften mit Unterstützung von Werkzeugen (insb. des GTR) und der Modellierungsaspekt in Sachsituationen im Vordergrund des Lernens. Das Unterrichtsvorhaben sollte eine angleichenden und wiederholenden **Zusammenfassung des Funktionsbegriffs, der linearen und quadratischen Funktionen sowie der Potenzen mit rationalen Exponenten** beinhalten. Algebraische Rechentechniken (Lösen von Gleichungen, Rechnen mit Potenzen) werden grundsätzlich parallel vermittelt und diagnosegestützt geübt (solange in diesem Unterrichtsvorhaben erforderlich in einer von drei Wochenstunden, ergänzt durch differenzierende, individuelle Zusatzangebote aus Aufgabensammlungen). Dem oft erhöhten Angleichungs- und Förderbedarf von Schulformwechslern wird ebenfalls durch gezielte individuelle Angebote Rechnung getragen. Hilfreich kann es sein, dabei die Kompetenzen der Mitschülerinnen und Mitschüler (z.B. durch Kurzvorträge) zu nutzen. Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung in die elementaren Bedienkompetenzen des GTR gerichtet werden. Ein erster Zugang hierzu ist in dem ersten Themenbereich über die Darstellung von Graphen linearer und quadratischer Funktionen, dem Erstellen von Wertetabellen und dem Lösen quadratischer Gleichungen möglich.

	Die Erarbeitung der Klasse der **Potenzfunktionen und ihrer Eigenschaften** ist Gegenstand des zweiten Themenbereichs in diesem Unterrichtsvorhaben. Die Untersuchung grundlegender Eigenschaften und der Auswirkung von Transformationen wird durch den GTR unterstützt. Die **quadratische und kubische Wurzelfunktion** können jeweils als Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^3$ eingeführt werden. Als Kontext für die Beschäftigung mit **Wachstumsprozessen** können zunächst Ansparmodelle (insbesondere lineare und exponentielle) betrachtet und mithilfe einer Tabellenkalkulation verglichen werden. Für kontinuierliche Prozesse und den Übergang zu **Exponentialfunktionen** werden verschiedene Kontexte (z.B. Bakterienwachstum, Abkühlung) untersucht. Die Einführung der **Sinusfunktion** erfolgt über Modellierung periodische Vorgänge (Abrollen einer CD, Sonnenstand, Ebbe und Flut) und die Mathematisierung am Einheitskreis. Transformationen führen zur allgemeinen Sinusfunktion und ihren Graphen.

Thema: *Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • berechnen durchschnittliche und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext • erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate • deuten die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten • deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/ Tangentensteigung • beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion) • leiten Funktionen graphisch ab • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Argumentieren (Vermuten)*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf • unterstützen Vermutungen beispielgebunden • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur	Inhaltlicher Schwerpunkt des Unterrichtsvorhabens A2 ist die Vermittlung eines Grundverständnisses des Ableitungsbegriffs. Ausgehend von der durchschnittlichen und lokalen Änderungsrate in Kontexten wird der Begriff der Ableitung einer Funktion bis hin zu einem ersten Verständnis der Ableitungsfunktion und der qualitativen/graphischen Betrachtung von Zusammenhängen zwischen Ausgangs- und Ableitungsfunktion entwickelt. Die algebraische Darstellung der Ableitungsfunktion mittels Funktionsterm (h-Methode) ist Gegenstand des Unterrichtsvorhabens A3. Ausgangspunkt für die Begriffsbildung der **durchschnittlichen Änderungsrate** ist die Beschreibung des Änderungsverhaltens von funktionalen Zusammenhängen in unterschiedlichen Sachsituationen. Für den Einstieg wird ein Stationenlernen zu durchschnittlichen Änderungsraten in unterschiedlichen Sachzusammenhängen empfohlen, die auch im weiteren Verlauf immer wieder auftauchen (z.B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, Temperaturmessung, Aktienkurse, Entwicklung regenerativer Energien, Sonntagsfrage, Wirk- oder Schadstoffkonzentration, Wachstum, Kosten- und Ertragsentwicklung). Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird im Sinne eines spiraligen Curriculums qualitativ und heuristisch verwendet. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur **lokalen Änderungsrate** kann z.B. die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Momentangeschwindigkeit genutzt werden. Der kontextbezogene Begriff der lokalen Änderungsrate führt zum mathematischen Begriff der **Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0** und zur Betrachtung des Grenzwertprozesse. An Funktionsbeispielen (z.B. f(x) = 1/x, f(x) = sqr(x)) wird die geometrische und nummerische Darstellung der Grenz-

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … grafischen Messen von Steigungen • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	wertbildung verdeutlicht. Tabellenkalkulation und Dynamische-Geometrie-Software werden zur numerischen und geometrischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekanten zur Tangenten (Zoomen) eingesetzt. Die Untersuchung der Zuordnung $x_0 \rightarrow f'(x_0)$ (mit GTR-Unterstützung) und ihre Deutung als Funktion führt zum Begriff der Ableitungsfunktion. Im Zusammenhang mit dem **graphischen Ableiten** und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden. Hier ist auch der Ort, den Begriff des Extrempunktes zu präzisieren und dabei auch Sonderfälle, wie eine konstante Funktion, zu betrachten, während eine Untersuchung der Änderung von Änderungen erst zu einem späteren Zeitpunkt des Unterrichts (Q1) vorgesehen ist.

Thema: *Von den Potenzfunktionen zu den ganzrationalen Funktionen (E-A3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate • beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion) • leiten Funktionen graphisch ab • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen • nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten • wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*	Im Anschluss an Unterrichtsvorhaben II (Thema E-A2) wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für eine quadratische Funktion wird der **Grenzübergang mit der „h-Methode“** durchgeführt, zunächst an einer Stelle, dann für beliebige x. Als Einstiegsproblem wird die Frage nach der Steigfähigkeit eines Raupenfahrzeugs (s. Einstiegsaufgabe) empfohlen, dessen Lösung sich dann verallgemeinern lässt (und auch schon zur Faktorregel führt). Um die **Ableitungsregel für höhere Potenzen** zu vermuten, nutzen die Schüler den GTR und die Möglichkeit, Werte der Ableitungsfunktionen näherungsweise zu tabellieren und zu plotten. Die Vermutung kann für $f(x) = x^3$ analog zur quadratischen Funktion mit der „h-Methode“ bestätigt und dann zur Potenzregel verallgemeinert werden. **Faktor- und Summenregel** lassen sich an dieser Stelle ebenfalls mit Hilfe algebraischer Umformungen beweisen („h-Methode“) und/oder durch Zeichnen der Graphen mit den GTR bestätigen und veranschaulichen, indem an das graphische Ableiten (E-A2) angeknüpft wird. Der **Begriff der ganzrationalen Funktion** wird definiert und ganzrationale Funktionen vom Grad 3 werden Gegenstand einer qualitativen Erkundung mit dem GTR, wobei Parameter gezielt variiert werden. Bei der Klassifizierung der Formen können die Begriffe aus Unterrichtsvorhaben II (Thema E-A2) eingesetzt werden. Zusätzlich werden die Symmetrie zum Ursprung und das Globalverhalten auch für Potenzen größer als 3 untersucht. Die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert. Durch gleichzeitiges Visualisieren der Ableitungsfunktion erklären Ler-

• nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen	nende die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen 3. Grades durch die Eigenschaften der ihnen vertrauten quadratischen Funktionen. Zugleich entdecken sie die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten, woran in Unterrichtsvorhaben VI (Thema E-A4) angeknüpft wird.

Thema: *Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)*

<table>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler

leiten Funktionen graphisch ab
nennen die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion
begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen
nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten
wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an
lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel
verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten
unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich
verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler

erkennen Muster und Beziehungen (Erkunden)
nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (hier: Zurückführen auf Bekanntes) (Lösen)
wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (Lösen)

</td><td>

Mithilfe des graphischen Ableitens am Beispiel der Sinus-Funktion entdecken die SuS, dass die Kosinus-Funktion deren Ableitung ist.
Untersuchung der Zusammenhänge zwischen Extrempunkten des Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung mithilfe der vier möglichen Vorzeichenwechsel an den Nullstellen führt zu:
- Monotonieverhalten
- Hoch- und Tiefpunkte
- Symmetrie und Globalverhalten
Bezüglich der Lösung von Gleichungen im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung wird durch geeignete Aufgaben Gelegenheit zum Üben von Lösungsverfahren ohne Verwendung des GTR gegeben.
Empfehlung: Der logische Unterschied zwischen notwendi-gen und hinreichenden Kriterien kann durch Multiple-Choice-Aufgaben vertieft werden, die rund um die Thematik der Funktionsuntersuchung von Polynomfunktionen Begründungsanlässe und die Möglichkeit der Einübung zentraler Begriffe bieten.
Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms argumentieren. So erzwingt z. B. Achsensymmetrie die Existenz eines Extrempunktes auf der Symmetrieachse.
Beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen werden auch Tangentengleichungen bestimmt.

</td></tr>
</table>

Argumentieren *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen […]) *(Begründen)* • erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie *(Beurteilen)*	

Einführungsphase Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes (E-G1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum
• stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)

Kommunizieren (Produzieren)
Die Schülerinnen und Schüler
• wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus
• wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen</td><td>Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z.B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (GPS, geographische Koordinaten, kartesische Koordinaten, Robotersteuerung).

Die Auswahl zwischen kartesischen und anderen Koordinaten kann bei genügend zur Verfügung stehender Zeit im Kontext der Spidercam getroffen werden: Bewegung der Spidercam in einem kartesischen Koordinatensystem, Ausrichtung der Kamera in Kugelkoordinaten.

Bei engem Zeitrahmen sollten zumindest Polarkoordinaten (evtl. in Form eines Schülervortrages) Erwähnung finden. (Hier empfiehlt die Fachkonferenz bewusst, über die Anforderungen des Kernlehrplanes hinauszugehen, damit die künftige Beschränkung auf kartesische Koordinaten in Kenntnis anderer, verbreitet üblicher Koordinatisierungen erfolgt.)

An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z.B. „unvollständigen“ Holzquadern) lernen die Schülerinnen und Schüler, ohne Verwendung einer DGS zwischen (verschiedenen) Schrägbildern einerseits und der Kombination aus Grund-, Auf- und Seitenriss andererseits zu wechseln, um ihr räumliches Vorstellungsvermögen zu entwickeln.

Mithilfe einer DGS werden unterschiedliche Möglichkeiten ein Schrägbild zu zeichnen untersucht und hinsichtlich ihrer Wirkung beurteilt.</td></tr>
</table>

Thema: *Vektoren bringen Bewegung in den Raum (E-G2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten Vektoren (in Koordinatendarstellung) als Verschiebungen und kennzeichnen Punkte im Raum durch Ortsvektoren • stellen gerichtete Größen (z. B. Geschwindigkeit, Kraft) durch Vektoren dar • berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras • addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität • weisen Eigenschaften von besonderen Dreiecken und Vierecken mithilfe von Vektoren nach **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)*	Neben anderen Kontexten kann auch hier die Spidercam verwendet werden, und zwar um Kräfte und ihre Addition in Anlehnung an die Kenntnisse aus dem Physikunterricht der SI als Beispiel für vektorielle Größen zu nutzen. Durch Operieren mit Verschiebungspfeilen werden einfache geometrische Problemstellungen gelöst: Beschreibung von Diagonalen (insbesondere zur Charakterisierung von Viereckstypen), Auffinden von Mittelpunkten (ggf. auch Schwerpunkten), Untersuchung auf Parallelität.

Einführungsphase Stochastik (S)

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen (E-S1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• deuten Alltagssituationen als Zufallsexperimente
• simulieren Zufallsexperimente
• verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen
• stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch
• beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… Generieren von Zufallszahlen
… Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
… Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen</td><td>Beim Einstieg ist eine Beschränkung auf Beispiele aus dem Bereich Glücksspiele zu vermeiden. Einen geeigneten Kontext bietet die Methode der Zufallsantworten bei sensitiven Umfragen.

Zur Modellierung von Wirklichkeit werden durchgängig Simulationen – auch unter Verwendung von digitalen Werkzeugen (GTR, Tabellenkalkulation) – geplant und durchgeführt (Zufallsgenerator).

Das Urnenmodell wird auch verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren.

Die zentralen Begriffe Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert werden im Kontext von Glücksspielen erarbeitet und können durch zunehmende Komplexität der Spielsituationen vertieft werden.

Digitale Werkzeuge werden zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung von händischem Rechnen verwendet.</td></tr>
</table>

… Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Erwartungswert)	

Thema: *Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten – Mehrfeldertafeln (E-S2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • modellieren Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfeldertafeln • bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten • prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit • bearbeiten Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten. **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*	In diesem Unterrichtsvorhaben sollen die Schüler und Schülerinnen erfassen, inwieweit in Zufallsexperimenten bzw. statistischen Erhebungen veränderte Bedingungen oder das Vorwissen, dass ein bestimmtes Ereignis eingetreten ist, die Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten beeinflussen kann. Neben dem bereits bekannten **Baumdiagramm** zur Darstellung mehrstufiger Zufallsexperimente lernen sie die **Mehrfeldertafel** kennen. Je nach Aufgabenstellung interpretieren sie die Felder im Sachzusammenhang, füllen fehlende Teile aus oder bestimmen mit ihrer Hilfe bedingte Wahrscheinlichkeiten. Zwar spielen bedingte Wahrscheinlichkeiten gerade bei anwendungsbezogenen Aufgaben eine bedeutende Rolle, aber zur Förderung des Verständnisses der Wahrscheinlichkeitsaussagen und zur Schaffung von Vergleichsmöglichkeiten ist es besonders am Anfang der Reihe sinnvoll, **auch Aufgaben aus dem Bereich der Glücksspiele zu bearbeiten.** Um die Übertragbarkeit des Verfahrens zu sichern, werden bereits zu Beginn der Unterrichtsreihe **vor** der Klärung der Begriffe (bedingte Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel, Gegenereignis) und der Aufstellung der Regeln (Multiplikationsregel, Regel zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit) mindestens zwei Beispiele aus unterschiedlichen Kontexten betrachtet. Zum besseren Verständnis sollten parallel Darstellungen mit **absoluten** und **relativen Häufigkeiten** verwendet werden. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P_B(A)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung.

Kommunizieren *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten […] *(Rezipieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*	Besonders verdeutlicht und klar werden diese Zusammenhänge bei der **Übertragung von Mehrfeldertafeln in Baumdiagramme und umgekehrt.** Die Schülerinnen und Schüler sollen zwischen den Darstellungsformen Baumdiagramm und Vierfeldertafel wechseln können und diese zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung nutzen können. Das Herausarbeiten der Zusammenhänge zwischen den Inhalten der Vierfeldertafel und den Pfadwahrscheinlichkeiten bzw. den Wahrscheinlichkeiten längs der Pfade kann anhand einer Beispielaufgabe von den Schülern mit Hilfe gezielter Aufgabenstellungen (*in Gruppen)* erarbeitet, präsentiert und begründet werden. Beim Thema „**Stochastische Unabhängigkeit**“ kann von einer intuitiven Vorstellung, wann Ereignisse voneinander abhängig bzw. unabhängig sind, ausgegangen werden. Zum Herausarbeiten der Begriffsdefinition und der Multiplikationsregel bietet sich ein Beispiel aus dem Bereich „Ziehen mit und ohne Zurücklegen“ an. Neben dem mathematischen Aspekt des Modellierens zunehmend komplexerer Sachsituationen in den Ausrichtungen Strukturieren, Mathematisieren und Validieren sind **Kommunizieren und Argumentieren** Schlüsselkompetenzen dieser Unterrichtsreihe. Durch differenzierende Aufgabenstellungen und unterschiedliche Unterrichtsformen (z.B.: Partnerarbeit, Gruppenarbeit, Gruppenpuzzle) ist die Möglichkeit zu Austausch und Diskussion fast unbegrenzt. In diesem Zusammenhang bieten sich zum Abschluss dieser Unterrichtsreihe Aufgaben aus dem Kontext der kritischen Betrachtung und Interpretation medizinischer Testergebnisse an, da sie für die Förderung der oben genannten Schlüsselkompetenzen besonders geeignet.

2.2 Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachmethodischen und fachdidaktischen Grundsätze beschlossen. In diesem Zusammenhang beziehen sich die überfachlichen Grundsätze auf fächerübergreifende Aspekte, die auch Gegenstand der Qualitätsanalyse sind.

Überfachliche Grundsätze:

1. Geeignete Problemstellungen zeichnen die Ziele des Unterrichts vor und bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
2. Inhalt und Anforderungsniveau des Unterrichts entsprechen dem Leistungsvermögen der Schüler/innen.
3. Die Unterrichtsgestaltung ist auf die Ziele und Inhalte abgestimmt.
4. Medien und Arbeitsmittel sind schülernah gewählt.
5. Die Schüler/innen erreichen einen Lernzuwachs.
6. Der Unterricht fördert eine aktive Teilnahme der Schüler/innen.
7. Der Unterricht fördert die Zusammenarbeit zwischen den Schülern/innen und bietet ihnen Möglichkeiten zu eigenen Lösungen.
8. Der Unterricht berücksichtigt die individuellen Lernwege der einzelnen Schüler/innen.
9. Die Schüler/innen erhalten Gelegenheit zu selbstständiger Arbeit und werden dabei unterstützt.
10. Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Partner- bzw. Gruppenarbeit.
11. Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Arbeit im Plenum.
12. Die Lernumgebung ist vorbereitet; der Ordnungsrahmen wird eingehalten.
13. Die Lehr- und Lernzeit wird intensiv für Unterrichtszwecke genutzt.
14. Es herrscht ein positives pädagogisches Klima im Unterricht.
15. Wertschätzende Rückmeldungen prägen die Bewertungskultur und den Umgang mit Schülerinnen und Schülern.

Fachliche Grundsätze:

Im Unterricht werden fehlerhafte Schülerbeiträge produktiv im Sinne einer Förderung des Lernfortschritts der gesamten Lerngruppe aufgenommen und die Lernenden dazu ermutigt, auch fachlich unvollständige Gedanken zu äußern und zur Diskussion zu stellen. Die Bereitschaft zu problemlösendem Arbeiten wird durch Ermutigungen und Tipps gefördert und unterstützt.

Die Einstiege in neue Themen erfolgen grundsätzlich mithilfe sinnstiftender Kontexte, die an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen und deren Bearbeitung sie in die dahinter stehende Mathematik führt. Es wird genügend Zeit eingeplant, in der sich die Lernenden neues Wissen aktiv konstruieren und in der sie angemessene Grundvorstellungen zu neuen Begriffen entwickeln können. Durch regelmäßiges wiederholendes Üben werden grundlegende Fertigkeiten „wachgehalten“. Im Unterricht werden an geeigneter Stelle differenzierende Aufgaben (z.B. „Blütenaufgaben“) eingesetzt.

Die Lernenden werden zu regelmäßiger, sorgfältiger und vollständiger Dokumentation der von ihnen bearbeiteten Aufgaben angehalten.

Im Unterricht wird auf einen angemessenen Umgang mit fachsprachlichen Elementen geachtet.

Digitale Medien werden regelmäßig dort eingesetzt, wo sie dem Lernfortschritt dienen.

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung

Auf der Grundlage von § 48 SchulG, § 13 APO-GOSt sowie Kapitel 3 des Kernlehrplans Mathematik hat die Fachkonferenz im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen:

Siehe: Leistungsbewertungskonzept im Fach Mathematik Version 2.0

(Stand: 12.11.2017)

2.4 Lehr- und Lernmittel

In der Einführungsphase wird das Lehrbuch Lambacher Schweizer Mathematik – Einführungsphase, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2014, ISBN 978-3-12-735431-7 verwendet.

3 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen

Die Fachkonferenz Mathematik hat sich im Rahmen des Schulprogramms und in Absprache mit den betreffenden Fachkonferenzen auf folgende, zentrale Schwerpunkte geeinigt.

Zusammenarbeit mit anderen Fächern

Der Mathematikunterricht in der Oberstufe ist in vielen Fällen auf reale oder realitätsnahe Kontexte bezogen. Insbesondere erfolgt eine Kooperation mit den naturwissenschaftlichen Fächern auf der Ebene einzelner Kontexte. An den in den vorangegangenen Kapiteln ausgewiesenen Stellen wird das Vorwissen aus diesen Kontexten aufgegriffen und durch die mathematische Betrachtungsweise neu eingeordnet. Der besonderen Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften soll dadurch Rechnung getragen werden, dass die Erkenntnis von Zusammenhängen mathematisiert werden kann.

Die Zusammenarbeit mit der Fachkonferenz Physik wirkt sich insbesondere auf gemeinsam verwendete Schreibweisen, aber auch auf die Bereitstellung von Experimentiermaterial aus, z.B. im Unterrichtsvorhaben „Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes (E-G1)“.

Im Bereich der mathematischen Modellierung von Sachverhalten werden die naturwissenschaftlichen Modelle als Grundlage für sinnvolle Modellannahmen verdeutlicht. Insbesondere im Bereich „Wachstum und Zerfall“ werden die zugrundeliegenden physikalischen bzw. biologischen Modelle als Argumentationsgrundlage verwendet und durch mathematikhaltige Argumentationen verifiziert.

Geplant ist eine Kooperation mit weiteren Fächern, in denen deskriptive Statistik und das Argumentieren mit Hypothesen im Sinne der beurteilenden Statistik eine Rolle spielt.

Der Mehrwert der grafikfähigen Taschenrechner soll fächerübergreifend durch die drei naturwissenschaftlichen Fachschaften genutzt werden

Im Fach Physik sind direkte Synergien in der Messwerterfassung und der Nutzung des GTR als Werkzeug zum Modellieren von Zusammenhängen möglich.

Wettbewerbe

Die Fachgruppe beabsichtigt im Rahmen der MINT-Ausrichtung der Schule Arbeitsgemeinschaft mit Themen und Aufgaben aus vergangenen Känguru-Wettbewerben und geeigneten Mathematik-Olympiaden einzurichten.

Die Teilnahme an den Wettbewerben wird den Schülerinnen und Schülern in Absprache mit der Stufenleitung ermöglicht.

Projekttage

Im Rahmen der jährlich am Nicolaus-Cusanus-Gymnasium stattfindenden Cusans-Woche bietet die Fachkonferenz Mathematik mindestens ein Projekt für Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe an, wenn dies in thematischer Weise möglich ist.

Exkursionen

Die Fachgruppe Mathematik beabsichtigt Exkursionen und außerschulische Lernorte in den Mathematikunterricht der Einführungsphase einzubeziehen. Dabei soll insbesondere eine Zusammenarbeit mit dem Mathematischen Institut der Universität Bonn und dem Hausdorff Center for Mathematics angestrebt werden.

Im Rahmen der Zusammenarbeit mit den Kooperationspartnern und im Rahmen des Netzwerkes MINT-EC ermöglicht das Nicolaus-Cusanus-Gymnasium in Abstimmung mit der Stufenleitung und dem Bereich Studien- und Berufsorientierung die Teilnahme an Exkursionen und Workshops unter thematischen oder berufsorientierenden Gesichtspunkten.

4 Qualitätssicherung und Evaluation

Durch parallele Klausuren (vgl. 2.3) in den Grundkursen, durch Diskussion der Aufgabenstellung von Klausuren in Fachdienstbesprechungen und eine regelmäßige Erörterung der Ergebnisse von Leistungsüberprüfungen wird ein hohes Maß an fachlicher Qualitätssicherung erreicht.

Das schulinterne Curriculum wird nach Bedarf evaluiert. Auf den Sitzungen der Fachkonferenz und auf Dienstbesprechungen werden dazu auf der Grundlage konkreter Unterrichtserfahrungen Verbesserungsvorschläge von den Fachlehrkräften eingebracht und diskutiert. Anschließend wird eine Arbeitsgruppe gebildet, die eine entsprechende Beschlussvorlage für die erste Sitzung der Fachkonferenz des folgenden Schuljahres entwirft.

Nicolaus-Cusanus-Gymnasium
Schulinterner Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe - Qualifizierungsphase

Mathematik

Version 2.0
Stand: 11.11.2019

Inhalt

Seite

1 Die Fachgruppe Mathematik am Nicolaus-Cusanus-Gymnasium

Das Nicolaus-Cusanus-Gymnasium (NCG) ist ein Gymnasium mit bilingualem deutsch-englischem Bildungsgang und mathematisch-naturwissenschaftlichem Schwerpunkt in der Trägerschaft der Stadt Bonn. Neben weiteren städtischen Gymnasien/ Gesamtschulen sind im Umfeld mehrere private Gymnasien angesiedelt. Das NCG hat eine entsprechend heterogene Schülerschaft, was den sozialen und ethnischen Hintergrund betrifft. Das NCG ist in der Sekundarstufe I dreizügig und wird als Offene Ganztagsschule geführt.

In die Einführungsphase der Sekundarstufe II wurden in den letzten Jahren regelmäßig 20 - 30 Schülerinnen und Schüler neu aufgenommen, überwiegend aus Haupt- und Realschulen der Stadt Bonn, die auf die parallelen Kurse gleichmäßig verteilt werden.

In der Regel werden in der Einführungsphase vier parallele Grundkurse eingerichtet, aus denen sich für die Qualifizierungsphase ein Leistungs- und drei Grundkurse entwickeln.

Der Unterricht findet im Doppelstunden-Modell statt, die Kursblockung sieht grundsätzlich für Grundkurse eine, für Leistungskurse zwei Doppelstunden vor.

Den im Schulprogramm ausgewiesenen Zielen, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu bieten, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik in besonderer Weise verpflichtet:

Durch ein fachliches Förderprogramm unter Einbeziehung von Schülerinnen und Schülern als Tutoren, begleitet durch regelmäßige Sprechstunden der Lehrkräfte und dort getroffene Lernvereinbarungen, werden Schülerinnen und Schüler mit Übergangs- und Lernschwierigkeiten intensiv unterstützt.

Schülerinnen und Schüler aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme an Känguru-Wettbewerb und der Mathematik-Olympiade im Fach Mathematik angehalten und, wo erforderlich, begleitet. Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern der Oberstufe nimmt jedes Jahr am Bonner Mathematikturnier teil.

Für den Fachunterricht aller Stufen besteht Konsens darüber, dass wo immer möglich mathematische Fachinhalte mit Lebensweltbezug vermittelt werden.

In der Sekundarstufe I wird ein wissenschaftlicher Taschenrechner ab Klasse 7 verwendet, dynamische Geometrie-Software und Tabellenkalkulation werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt, der Umgang mit ihnen eingeübt. Dazu stehen in der Schule vier PC-Unterrichtsräume zur Verfügung. In der Sekundarstufe II kann deshalb davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler mit den grundlegenden Möglichkeiten dieser digitalen Werkzeuge vertraut sind.

Der grafikfähige Taschenrechner wird am Ende der Jahrgangsstufe 9 eingeführt. Die Fachkonferenz Mathematik hat sich für die Nutzung eines grafikfähigen Taschenrechners ohne CAS ausgesprochen und sich für den Einsatz des GTR-Modells der Firma Texas Instrument "TI-Nspire CX" (ohne CAS) entschieden. Die Schule empfiehlt die Anschaffung dieses Rechnermodells. Die Möglichkeit zur Nutzung von Computer-Algebra-Systems (CAS) auf Tablets, Laptops und Computern anstelle von Taschenrechnern besteht zur Zeit nicht. Die in der Sekundarstufe II neu in das NCG aufgenommenen Schülerinnen und Schüler verfügen in der Regel noch nicht über einen GTR.

2 Entscheidungen zum Unterricht

2.1 Unterrichtsvorhaben

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Schülerinnen und Schülern Lerngelegenheiten zu ermöglichen, so dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

Im „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben" (Kapitel 2.1.1) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich für die Unterrichtsvorhaben der Qualifizierungsphase.

Das Übersichtsraster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen" an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene konkretisierter Unterrichtsvorhaben Berücksichtigung finden. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Schülerinteressen oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Während der Fachkonferenzbeschluss zum „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben" zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechslern und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz Bindekraft entfalten soll, besitzt die Ausweisung „konkretisierter Unterrichtsvorhaben" (Kapitel 2.1.2) empfehlenden Charakter. Referendarinnen und Referendaren sowie neuen Kolleginnen und Kollegen dienen diese vor allem zur standardbezogenen Orientierung in der neuen Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen Absprachen zu didaktisch-methodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen, die im Einzelnen auch den Kapiteln 2.2 bis 2.4 zu entnehmen sind. Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

2.1.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS</th></tr>
<tr><td>
<u>Unterrichtsvorhaben Q1-I:</u>

Thema: Optimierungsprobleme (Q-GK-A1)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Problemlösen
Inhaltsfeld:
Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Funktionen als mathematische Modelle
Zeitbedarf: 9 Std.
</td><td>
<u>Unterrichtsvorhaben Q1-II :</u>

Thema: Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q-GK-A2)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Werkzeuge nutzen
Inhaltsfelder:
Funktionen und Analysis (A)
Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
Funktionen als mathematische Modelle
Lineare Gleichungssysteme
Zeitbedarf: 15 Std.
</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
<u>Unterrichtsvorhaben Q1-III:</u>

Thema: Beschreibung von Geraden und linearen Bewegungen im Raum (Q-GK-G1)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Werkzeuge nutzen
Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden)
Zeitbedarf: 9 Std.
</td><td>
<u>Unterrichtsvorhaben Q1-IV:</u>

Thema: Eine Sache der Logik und der Begriffe: Untersuchung von Lagebeziehungen (Q-GK-G2)

Zentrale Kompetenzen:
Argumentieren
Kommunizieren
Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Lagebeziehungen
Zeitbedarf: 6 Std.
</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS (Fortsetzung)	
<u>*Unterrichtsvorhaben Q1-V:*</u> **Thema*:*** *Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung von geometrischen Problemen (Q-GK-G3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen) • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf:** 9 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben Q1-VI :*</u> **Thema*:*** *Skalarprodukt – Geometrische Objekte und Situationen im Raum untersuchen (Q-GK-G4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Skalarprodukt **Zeitbedarf:** 9 Std
<u>*Unterrichtsvorhaben Q1-VII:*</u> **Thema:** *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK-A3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Grundverständnis des Integralbegriffs **Zeitbedarf**: 9 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben Q1-VIII:*</u> **Thema**: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK-A4)* **Zentrale Kompetenzen**: • Argumentieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Integralrechnung **Zeitbedarf**: 12 Std.
<u>**Summe Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS 78 Stunden**</u>	

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q2) – GRUNDKURS Fortsetzung</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-I:</u>

Thema: Natürlich: Exponentialfunktionen (Q-GK-A5)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Fortführung der Differentialrechnung

Zeitbedarf: 9 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-II:</u>

Thema: Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK-A6)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
• Fortführung der Differentialrechnung
• Integralrechnung

Zeitbedarf: 12 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q2) – GRUNDKURS</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-III:</u>

Thema: Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-GK-S1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zeitbedarf: 6 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-IV:</u>

Thema: Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Binomialverteilung (Q-GK-S2)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Binomialverteilung

Zeitbedarf: 9 Std.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-V:</u>

Thema: Modellieren mit Binomialverteilungen (Q-GK-S3)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Binomialverteilung

Zeitbedarf: 9 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-VI :</u>

Thema: Von Übergängen und Prozessen (Q-GK-S4)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Stochastische Prozesse

Zeitbedarf: 9 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Summe Qualifikationsphase (Q2) – GRUNDKURS: 54 Stunden</u></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-I:</u>

Thema:
Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, Besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Parameter)(Q-LK-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren, Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Fortführung der Differentialrechnung
• Funktionen als mathematische Modelle

Zeitbedarf: 25 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-II:</u>

Thema:
Von der Änderungsrate zum Bestand – Schlüsselkonzept Integral (Q-LK-A2)

Zentrale Kompetenzen:
• Kommunizieren, Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
• Grundverständnis des Integralbegriffs
• Integralrechnung

Zeitbedarf: 25 Std.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-III:</u>

Thema:
Exponentialfunktion (natürlicher Logarithmus, Ableitungen)(Q-LK-A3)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Fortführung der Differentialrechnung

Zeitbedarf: GK: 25 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-IV:</u>

Thema: Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (Produktregel, Kettenregel)(Q-LK-A4)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Modellieren, Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
• Funktionen als mathematische Modelle
• Fortführung der Differentialrechnung
• Integralrechnung

Zeitbedarf: 35 Std..</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Unterrichtsvorhaben Q1-V: **Thema**: *Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen und Schattenwurf) (Q-LK-G1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden) • Skalarprodukt **Zeitbedarf**: 20 Std.	
Summe Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS 130 Stunden	

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-I:</u>

Thema:
Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter (Q-LK-G2)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Kommunizieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
• Lineare Gleichungssysteme

Zeitbedarf: 10 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-II:</u>

Thema:
Lagebeziehungen und Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (Q-LK-G3)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Kommunizieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
• Lineare Gleichungssysteme

Zeitbedarf: 10 Std.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-III:</u>

Thema:
Untersuchung von Polyadern und Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen (Q-LK-G4)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Lagebeziehungen und Abstände
• Lineare Gleichungssysteme

Zeitbedarf: 20 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-IV:</u>

Thema:
Wahrscheinlichkeit – Statistik: Ein Schlüsselkonzept (Q-LK-SI)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen
• Problemlösen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Vorbereitung auf Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zeitbedarf: 5 Std.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS Fortsetzung</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-V:</u>

Thema:
Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Binomialverteilungen (Q-LK-S2)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Werkzeuge nutzen
Problemlösen
Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
Binomialverteilung
<u>Zeitbedarf</u><u>: 10 Std.</u></td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-VI:</u>

Thema: Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S3)

Zentrale Kompetenzen:
Problemlösen
Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Binomialverteilung
<u>Zeitbedarf:</u><u> 5 Std</u></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-VII:</u>

Thema: Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S4)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Kommunizieren
Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Testen von Hypothesen
<u>Zeitbedarf: 10 Std.</u></td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-VIII:</u>

Thema: Ist die Glocke normal? (Q-LK-S5)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Problemlösen
Werkzeuge nutzen
Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Normalverteilung
<u>Zeitbedarf: 10 Std.</u></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-IX:</u>

Thema: Von Übergängen und Prozessen (Q-LK-S6)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Argumentieren
Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Stochastische Prozesse
<u>Zeitbedarf: 10 Std.</u></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2"><u>Summe Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS: 90 Stunden</u></th></tr>
</table>

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

Q1 Grundkurse		
Unterrichtsvorhaben	**Thema**	**Stundenzahl**
I	Q-GK-A1	9
II	Q-GK-A2	15
III	Q-GK-G1	9
IV	Q-GK-G2	6
V	Q-GK-G3	9
VI	Q-GK-G4	9
VII	Q-GK-A3	9
VIII	Q-GK-A4	12
	Summe:	78
Q2 Grundkurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-GK-A5	9
II	Q-GK-A6	12
III	Q-GK-S1	6
IV	Q-GK-S2	9
V	Q-GK-S3	9
VI	Q-GK-S4	9
	Summe:	54

Q1 Leistungskurse		
Unterrichtsvorhaben	**Thema**	**Stundenzahl**
I	Q-LK-A1	25
II	Q-LK-A2	25
III	Q-LK-A3	25
IV	Q-LK-A4	35
V	Q-LK-G1	20
	Summe:	130
Q2 Leistungskurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-LK-G2	10
II	Q-LK-G3	10
III	Q-LK-G4	20
IV	Q-LK-S1	5
V	Q-LK-S2	5
VI	Q-LK-S3	10
VII	Q-LK-S4	10
VIII	Q-LK-S5	10
IX	Q-LK-S6	10
	Summe:	90

2.1.2 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Themen, Inhaltsfelder, inhaltliche Schwerpunkte und Kompetenzen hat die Fachkonferenz des Nicolaus-Cusanus-Gymnasiums verbindlich vereinbart. In allen anderen Bereichen sind Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bei der Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben möglich.

Darüber hinaus enthält dieser schulinterne Lehrplan in den Kapiteln 2.2 bis 2.4 übergreifende sowie z.T. auch jahrgangsbezogene Absprachen zur fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit, zur Leistungsbewertung und zur Leistungsrückmeldung. Je nach internem Steuerungsbedarf können solche Absprachen auch vorhabenbezogen vorgenommen werden.

Q-Phase Grundkurs Funktionen und Analysis (A)

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Optimierungsprobleme (Q-GK-A1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler

führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese
verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler

treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor.(Strukturieren)
übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)

Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler

finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation (Erkunden)
wählen heuristische Hilfsmittel (z.B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden)

</td><td>
Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“

Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u.a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen.

An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z.B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“).
Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht.
Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „schnellsten Weg“.

Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z.B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst
</td></tr>
</table>

• nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z.B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern …) *(Lösen)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*	über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung).

Thema: *Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q-GK-A2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Modellieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*) • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z.B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Designobjekte oder architektonische Formen können zum Anlass genommen werden, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Hier bieten sich nach einem einführenden Beispiel offene Unterrichtsformen (z.B. Lerntheke) an. Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen

• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*) • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (*Validieren*) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*) **Werkzeuge nutzen** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden […], Berechnen und Darstellen	der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser" zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.

Thema: *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK-A3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Kommunizieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (*Rezipieren*) • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (*Produzieren*) • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus (*Produzieren*) • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (*Produzieren*) • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (*Produzieren*) • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (*Produzieren*)	Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden. Das Stationenlernen wird in einem Portfolio dokumentiert. Die Ergebnisse der Gruppenarbeit können auf Plakaten festgehalten und in einem Museumsgang präsentiert werden. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Thema: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK-A4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate • bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Argumentieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf (*Vermuten*) • unterstützen Vermutungen beispielgebunden (*Vermuten*) • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*) • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)	Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (vgl. Thema Q-GK-A3) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist. Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag). Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. (z.B. durch ein sog. Funktionendomino) In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt.

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen […] digitale Werkzeuge [Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter] zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals	Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.

<table>
<tr><td colspan="2">

Thema: *Natürlich: Exponentialfunktionen (Q-GK-A5)*

</td></tr>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>

Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion
- untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze
- interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang
- bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
- natürliche Exponentialfunktion

Prozessbezogene Kompetenzen:
Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)*
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z.B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) *(Lösen)*
- führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)*
- variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren).*

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler

- Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen

</td><td>

Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte z.B. in Gruppenarbeit mit Präsentation stehen (Wachstum und Zerfall).
Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen.

Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet.
Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle.

Dazu könnten sie eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die sie immer weiter verfeinern oder in der Grafik ihres GTR experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden.

Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.

</td></tr>
</table>

… grafischen Messen von Steigungen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus • nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	

Thema: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK-A6)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: - Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) • wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an • wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Modellieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine	Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. Als Beispiel für eine Summenfunktion wird eine Kettenlinie modelliert. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z.B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert.

Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*) • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (*Mathematisieren*) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*) • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (*Validieren*) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*)	

Q-Phase Grundkurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Beschreibung von Geraden und linearen Bewegungen im Raum (Q-GK-G1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar
interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext
berechnen Durchstoßpunkte von Geraden mit den Koordinatenebenen
Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
erfassen und strukturieren Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
übersetzen Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)</td><td>Lineare Bewegungen werden z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte) einbezogen werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z.B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.</td></tr>
</table>

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Geodreiecke […] geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden … Darstellen von Objekten im Raum	

Thema: *Eine Sache der Logik und der Begriffe: Untersuchung von Lagebeziehungen (Q-GK-G2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden • berechnen Schnittpunkte von Geraden • interpretieren die Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen • untersuchen Bewegungsbahnen und gegenseitige Lage zweier Objekte zueinander und interpretieren die Parameter im Sachkontext **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Zusammenhänge zwischen algebraischen Lösungen und geometrischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) (Begründen) • nutzen sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen) • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen) ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)	Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen (z.B. Fotografien) räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z.B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Ko-ordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen. Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt einerseits auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z.B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“) und andererseits auf der Weiterentwicklung der Modellierung zunehmend komplexer werdender Sachsituationen. Bei der rein mathematischen Untersuchung von Lagebeziehungen sind Fluss-diagramme und Tabellen ein geeignetes Mittel, solche Zusammenhänge darzustellen. Als Sachkontext soll die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Q-GK-G1 wieder aufgegriffen werden. Dabei wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant. Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert könnte (über den Kernlehrplan hinausgehend) das Abstandsminimum numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermittelt werden. Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden (Q-GK-G4).

Kommunizieren *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (Rezipieren) • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (Produzieren) • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren) • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren) • diskutieren Modellannahmen und ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihres Realitätsbezuges. (Diskutieren) • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (Diskutieren)	

Thema: *Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung von geometrischen Problemen (Q-GK-G3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Ebenen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen • berechnen Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit	Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema Q-GK-G2 wieder aufgegriffen. In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt ver-gleichen). Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem. Die Untersuchung von Schattenwürfen motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung (Q-GK-G2) mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren. Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.

und Effizienz *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	

Thema: *Skalarprodukt – Geometrische Objekte und Situationen im Raum untersuchen (Q-GK-G4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bzgl. Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*	Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden. Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit kann in Anwendungskontexten (z.B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes, vgl. Q-GK-G2) entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u.a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z.B. Gebäude) bezogen werden. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege (wie z.B. der Satz des Pythagoras oder Strahlensätze) als Alternative aufgezeigt.

Q-Phase Grundkurs Stochastik (S)

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-GK-S1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*	Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Thema: *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-GK-S2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente • erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten • beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen […] **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […] • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Generieren von Zufallszahlen … Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen	Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine allgemeingültige Herleitung wird verzichtet. Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von n und p ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen. Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.

… Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen … Variieren der Parameter von Binomialverteilungen … Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungs-wert, Standardabweichung)	

Thema: *Modellieren mit Binomialverteilungen (Q-GK-S3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen • schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)*	In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt: - die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment - die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette - die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße - die Unabhängigkeit der Ergebnisse - die Benennung von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen. Wenn genügend Unterrichtszeit zur Verfügung steht, können im Rahmen der beurteilenden Statistik vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) Produzenten- und Abnehmerrisiken bestimmt werden. Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (G-GK-S4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert	Hinweis: Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann. Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.

werden können *(Beurteilen)*	

Q-Phase Leistungskurs Funktionen und Analysis (A)

Thema: *Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, Besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Parameter) (Q-LK-A1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen ○ Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten • untersuchen Funktionenscharen • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind **Prozessbezogene Kompetenzen:**	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden in unterschiedlichen Kontexten (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z.B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkten, Symmetrieüberlegungen, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen

<table>
<tr>
<td>
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler

erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)
reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren)
erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)

Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler

finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation (Erkunden)
wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden)
nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Verallgemeinern …) (Lö-

</td>
<td>
der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen.

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.

Über freie Parameter (aus unterbestimmten Gleichungssystemen) werden Lösungsscharen erzeugt und deren Elemente hinsichtlich ihrer Eignung für das Modellierungsproblem untersucht und beurteilt. An innermathematischen „Steckbriefen“ werden Fragen der Eindeutigkeit der Modellierung und der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht.

Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig über die Spline-Interpolation forschen und referieren zu lassen.
</td>
</tr>
</table>

sen) • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden […], Berechnen und Darstellen	

Thema: *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-LK-A2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate • bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungs-	Hinweis: Auch im Leistungskurs bilden eigene anschauliche Erfahrungen ein gutes Fundament für den weiteren Begriffsaufbau. Deshalb hat sich die Fachkonferenz für einen ähnlichen Einstieg in die Integralrechnung im Leistungskurs entschieden wie im Grundkurs. Er unterscheidet sich allenfalls durch etwas komplexere Aufgaben von der Einführung im Grundkurs. Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt werden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit - Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Konstruktion einer Größe (z. B. physikalische Arbeit) erforderlich, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt. Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Einführung der Begriff Integralfunktion genutzt werden.

wege *(Produzieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)* • erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen)* ***Werkzeuge nutzen*** • *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen […] digitale Werkzeuge *[Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter]* zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals	Schülerinnen und Schüler sollen selbst entdecken, dass die Integralfunktion J_a eine Stammfunktion der Randfunktion ist. Dazu wird das entwickelte numerische Näherungsverfahren zur Rekonstruktion einer Größe aus der Änderungsrate auf eine kontextfrei durch einen Term gegebene Funktion angewendet und zur Konstruktion der Integralfunktion genutzt (Verallgemeinerung). Die Graphen der Randfunktion und der genäherten Integralfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Um diesen Zusammenhang zu begründen, wird der absolute Zuwachs $J_a(x+h) - J_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren, und motiviert, die Voraussetzungen zu präzisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. *Hier bieten sich Möglichkeiten zur inneren Differenzierung: Formalisierung der Schreibweise bei der Summenbildung, exemplarische Einschachtelung mit Ober- und Untersummen, formale Grenzwertbetrachtung, Vergleich der Genauigkeit unterschiedlicher Abschätzungen.* In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Produktsummen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden.

	Bei der Berechnung der Volumina wird stark auf Analogien zur Flächenberechnung verwiesen. (Gedanklich wird mit einem „Eierschneider" der Rotationskörper in berechenbare Zylinder zerlegt, analog den Rechtecken oder Trapezen bei der Flächenberechnung. Auch die jeweiligen Summenformeln weisen Entsprechungen auf.) *Mit der Mittelwertberechnung kann bei entsprechend zur Verfügung stehender Zeit (über den Kernlehrplan hinausgehend) noch eine weitere wichtige Grundvorstellung des Integrals erarbeitet werden. Hier bieten sich Vernetzungen mit dem Inhaltsfeld Stochastik an.*

Thema: *Natürlich: Exponentialfunktionen und Logarithmus (Q-LK-A3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und begründen die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion • nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion • führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück • wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: ○ natürliche Exponentialfunktion ○ Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis ○ natürliche Logarithmusfunktion • nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: x → 1/x . **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme)*(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* •	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens empfiehlt sich eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte in Gruppenarbeit mit Präsentation (Wachstum und Zerfall). Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Schülerinnen entwickeln die Produkt- und Kettenregel und wenden sie an. Die Eulersche Zahl kann z.B. über das Problem der stetigen Verzinsung. eingeführt werden. Der Grenzübergang wird dabei zunächst durch den GTR unterstützt. Da der Rechner dabei numerisch an seine Grenzen stößt, wird aber auch eine Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff motiviert. Die Frage nach der Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt wird zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle gesucht. Dazu kann man eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die immer weiter verfeinert wird. Oder man experimentiert in der Grafik des GTR, indem Tangenten an verschiedenen Stellen an die

- variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* - verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … grafischen Messen von Steigungen - entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus - nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	Funktion gelegt werden. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden. Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich automatisch, dass für die Eulersche Zahl als Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen. Umkehrprobleme im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktion werden genutzt, um den natürlichen Logarithmus zu definieren und damit auch alle Exponentialfunktionen auf die Basis e zurückzuführen. Mit Hilfe der schon bekannten Kettenregel können dann auch allgemeine Exponentialfunktionen abgeleitet werden. Eine Vermutung zur Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird graphisch geometrisch mit einem DGS als Ortskurve gewonnen und anschließend mit der Kettenregel bewiesen.

Thema: *Zusammengesetzte Funktionen* **-** *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-LK-A4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem begrenzten Wachstum • bestimmen Integrale […] mithilfe von gegebenen oder Nachschlagewerken entnommenen Stammfunktionen • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen An-	Als Beispiel für eine Summenfunktion eignet sich die Modellierung einer Kettenlinie. An mindestens einem Beispiel wird auch ein beschränktes Wachstum untersucht. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich deren Verhalten für betragsgroße Argumente erarbeitet. Auch in diesen Kontexten ergeben sich Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionenklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen. Vernetzungsmöglichkeiten mit der Stochastik sollten aufgegriffen werden (z.B. Gaußsche Glockenkurve – sofern zu diesem Zeitpunkt bereits behandelt).

nahmen *(Validieren)*	

Q-Phase Leistungskurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Thema: *Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen und Schattenwurf)* *(Q-LK-G1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Geraden in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • bestimmen Abstände zwischen Punkten und Geraden [...] **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender)	Lineare Bewegungen werden z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit mittels einer Funktion zu variieren, z.B. zur Beschreibung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (hier die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Strahlen und Strecken einbezogen. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen erlauben die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen. Solche Darstellungen sollten geübt werden.

Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* ***Problemlösen*** • *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden … Darstellen von Objekten im Raum	Auf dieser Grundlage können z.B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an. Das Skalarprodukt wird als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt. Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden. Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produktes von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. Division durch einen Vektor) gestellt. Anknüpfend an das Thema E-G2 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarproduktes untersucht. Dabei bieten sich vorrangig Problemlöseaufgaben (z.B. Nachweis von Viereckstypen) an. Ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt kann im Einzelfall dahinterliegende Sätze transparent machen wie z.B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ und $(\vec{a})^2=(\vec{b})^2$ für die Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eines Parallelogramms. In Anwendungskontexten (z.B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes) wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u.a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung bietet sich an.

Thema: *Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter (Q-LK-G2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungs-	Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an Q-LK-G2 anknüpfender Weg vorgeschlagen: Betrachtet wird die Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen ($\vec{a} = 0$) wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform als Sonderformen der Normalenform) werden in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt, verglichen und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse. Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Zur Veranschaulichung der Lage von Ebenen wird eine räumliche Geometriesoftware verwendet. Vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) kann bei genügend zur Verfügung stehender Zeit die Lösungsmenge eines Systems von Koordinatengleichungen als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden. Dabei wird die Matrix-Vektor-Schreibweise genutzt. Dies bietet weitere Möglichkeiten, bekannte mathematische Sachverhalte zu vernetzen. Die Auseinandersetzung mit der Linearen Algebra wird in Q-LK-G4 weiter vertieft. Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenenglei-

wege *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*	chung entwickelt. Als Einstiegskontext dient eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben. So können auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden. Ein Wechsel zwischen Koordinatenform und Parameterform der Ebene ist über die drei Achsenabschnitte möglich. Alternativ wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines Gleichungssystems bestimmt.

Thema: *Lagebeziehungen und Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (Q-LK-G3)*

<table>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext
• untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden […]
• berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext
• bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

Prozessbezogene Kompetenzen:
Argumentieren
Die Schülerinnen und Schüler
• präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten)
• stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) (Begründen)
• nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen)
• berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige/hinreichende Bedingung, Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (Begründen)
• überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)

Kommunizieren
Die Schülerinnen und Schüler
• erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (Rezipieren)
• verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in ange-
</td><td>
Die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden ist eingebettet in die Untersuchung von Lagebeziehungen. Die Existenzfrage führt zur Unterscheidung der vier möglichen Lagebeziehungen.

Als ein Kontext kann die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Thema Q-LK-G1 wieder aufgenommen werden, insbesondere mit dem Ziel, die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten im Unterschied zur Abstandsberechnung zwischen den Flugbahnen zu vertiefen. Hier bietet sich wiederum eine Vernetzung mit den Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung an.

Die Berechnung des Abstandes zweier Flugbahnen kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nachträglich aus dem Abstand bestimmt werden müssen.

In der Rückschau sollten die Schüler nun einen Algorithmus entwickeln, um über die Lagebeziehung zweier Geraden zu entscheiden. Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Die Schülerinnen und Schüler können selbst solche Darstellungen entwickeln, auf Lernplakaten dokumentieren, präsentieren, vergleichen und in ihrer Brauchbarkeit beurteilen. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollten nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden.
</td></tr>
</table>

messenem Umfang *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)*	

Thema: *Untersuchung von Polyadern und Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen (Q-LK-G4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen • untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen • stellen Geraden und geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar • stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*	Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen werden.. Auch hier wird eine räumliche Geometriesoftware eingesetzt. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt Die Bestimmung von Längen und Winkeln setzt das Thema Q-LK-G2 direkt fort. Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene erlauben Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung. Abstände von Punkten zu Geraden und zu Ebenen ermöglichen es z.B., die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen. Abgesehen von der Abstandsberechnung zwischen Geraden (erst in Q-LK-G5) müssen weitere Formen der Abstandsberechnungen nicht systematisch abgearbeitet werden, sie können bei Bedarf im Rahmen von Problemlöseprozessen in konkrete Aufgaben integriert werden. Das Gauß-Verfahren soll anknüpfend an das Thema Q-LK-A2 im Zusammenhang mit der Berechnung von Schnittfiguren oder bei der Konstruktion regelmäßiger Polyeder vertieft werden. Weiter bietet der Einsatz des GTR Anlass, z.B. über die Interpretation der trigonalisierten Koeffizientenmatrix die Dimension des Lösungsraumes zu untersuchen. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung und der algebraischen Formalisierung soll stets deutlich werden. In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert gelegt auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der

• nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* • *variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (Reflektieren)* ***Modellieren*** • *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • *reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	Lösung von problemorientierten Aufgaben. Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Schülerinnen und Schülern prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten. Deshalb beschließt die Fachkonferenz, Problemlösungen mit den prozessbezogenen Zielen zu verbinden, 1) eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, 2) geometrische Hilfsobjekte einzuführen, 3) an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, 4) bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, 5) unterschiedliche Lösungswege Kriterien gestützt zu vergleichen. Bei der Durchführung der Lösungswege können die Schülerinnen und Schüler auf das entlastende Werkzeug des GTR zurückgreifen, jedoch steht dieser Teil der Lösung hier eher im Hintergrund und soll sogar bei aufwändigeren Problemen bewusst ausgeklammert werden. Bei Beweisaufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler Formalisierungen in Vektorschreibweise rezipieren und ggf. selbst vornehmen. Dabei spielt auch die Entdeckung einer Gesetzmäßigkeit – ggf. mit Hilfe von DGS – eine Rolle. Geeignete Beispiele bieten der Satz von Varignon oder der Sehnen-(Tangenten-)satz von Euklid. Die erworbenen Kompetenzen im Problemlösen sollen auch in Aufgaben zum Einsatz kommen, die einen Kontextbezug enthalten, so dass dieses Unterrichtsvorhaben auch unmittelbar zur Abiturvorbereitung überleitet bzw. zum Zweck der Abiturvorbereitung noch einmal wiederaufgenommen werden soll.

… Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen	

Q-Phase Leistungskurs Stochastik (S)

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-LK-S1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*	Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; über gezielte Veränderungen der Verteilung wird ein Gefühl für die Auswirkung auf deren Kenngrößen entwickelt. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Thema: *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-LK-S2)*

<table>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler

verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente
erklären die Binomialverteilung einschließlich der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten
nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler

treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler

nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]
verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… Generieren von Zufallszahlen
… Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen
… Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen

</td><td>
Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet.

Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und der Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“).

Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.
</td></tr>
</table>

Thema: *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von (binomialverteilten) Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen • nutzen die σ-Regeln für prognostische Aussagen • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern) *(Lösen)* • interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen***	Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung induktiv entdeckt werden: In einer Tabellenkalkulation wird bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Das Konzept der σ-Umgebungen wird durch experimentelle Daten abgeleitet. Es wird benutzt, um Prognoseintervalle anzugeben, den notwendigen Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit zu bestimmen und um das $\frac{1}{\sqrt{n}}$- Gesetz der großen Zahlen zu präzisieren.

Die Schülerinnen und Schüler • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […] • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Variieren der Parameter von Binomialverteilungen … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen … Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung) … Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen	

Thema: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse • beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)*	Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d.h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten. Die Logik des Tests soll dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z.B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z.B. Umfrageergebnisse aus dem Lokalteil der Zeitung) entwickelt werden, sie wird abschließend in einem ‚Testturm' visualisiert. Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert: - Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage? - Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie? Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet.

Thema: *Ist die Glocke normal? (Q-LK-S5)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion • untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen • beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gaußsche Glockenkurve) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren [...] komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen [...] komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*	Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dementsprechend beschließt die Fachkonferenz den Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben über die Untersuchung von Summenverteilungen. Mit einer Tabellenkalkulation werden die Augensummen von zwei, drei, vier Würfeln simuliert, wobei in der grafischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. Ergänzung für leistungsfähige Kurse: Gut geeignet ist auch die Simulation von Stichprobenmittelwerten aus einer (gleichverteilten) Grundgesamtheit. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang. Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. Q-LK-A3). Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR. Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gaußschen Glocken-

• wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Generieren von Zufallszahlen … Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen ... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen • nutzen digitale Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge, wählen sie gezielt aus und nutzen sie zum Erkunden …, Berechnen und Darstellen • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	kurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gaußsche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann.

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (Q-LK-S6)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert	Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann. Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an. Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse Matrix bereitstellt.

werden können *(Beurteilen)*	

2.2 Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachmethodischen und fachdidaktischen Grundsätze beschlossen. In diesem Zusammenhang beziehen sich die überfachlichen Grundsätze auf fächerübergreifende Aspekte, die auch Gegenstand der Qualitätsanalyse sind.

Überfachliche Grundsätze:

1. Geeignete Problemstellungen zeichnen die Ziele des Unterrichts vor und bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
2. Inhalt und Anforderungsniveau des Unterrichts entsprechen dem Leistungsvermögen der Schüler/innen.
3. Die Unterrichtsgestaltung ist auf die Ziele und Inhalte abgestimmt.
4. Medien und Arbeitsmittel sind schülernah gewählt.
5. Die Schüler/innen erreichen einen Lernzuwachs.
6. Der Unterricht fördert eine aktive Teilnahme der Schüler/innen.
7. Der Unterricht fördert die Zusammenarbeit zwischen den Schülern/innen und bietet ihnen Möglichkeiten zu eigenen Lösungen.
8. Der Unterricht berücksichtigt die individuellen Lernwege der einzelnen Schüler/innen.
9. Die Schüler/innen erhalten Gelegenheit zu selbstständiger Arbeit und werden dabei unterstützt.
10. Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Partner- bzw. Gruppenarbeit.
11. Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Arbeit im Plenum.
12. Die Lernumgebung ist vorbereitet; der Ordnungsrahmen wird eingehalten.
13. Die Lehr- und Lernzeit wird intensiv für Unterrichtszwecke genutzt.
14. Es herrscht ein positives pädagogisches Klima im Unterricht.
15. Wertschätzende Rückmeldungen prägen die Bewertungskultur und den Umgang mit Schülerinnen und Schülern.

Fachliche Grundsätze:

Im Unterricht werden fehlerhafte Schülerbeiträge produktiv im Sinne einer Förderung des Lernfortschritts der gesamten Lerngruppe aufgenommen und die Lernenden dazu ermutigt, auch fachlich unvollständige Gedanken zu äußern und zur Diskussion zu stellen. Die Bereitschaft zu problemlösendem Arbeiten wird durch Ermutigungen und Tipps gefördert und unterstützt.

Die Einstiege in neue Themen erfolgen grundsätzlich mithilfe sinnstiftender Kontexte, die an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen und deren Bearbeitung sie in die dahinter stehende Mathematik führt. Es wird genügend Zeit eingeplant, in der sich die Lernenden neues Wissen aktiv konstruieren und in der sie angemessene Grundvorstellungen zu neuen Begriffen entwickeln können. Durch regelmäßiges wiederholendes Üben werden grundlegende Fertigkeiten „wachgehalten“. Im Unterricht werden an geeigneter Stelle differenzierende Aufgaben (z.B. „Blütenaufgaben“) eingesetzt.

Die Lernenden werden zu regelmäßiger, sorgfältiger und vollständiger Dokumentation der von ihnen bearbeiteten Aufgaben angehalten.

Im Unterricht wird auf einen angemessenen Umgang mit fachsprachlichen Elementen geachtet.

Digitale Medien werden regelmäßig dort eingesetzt, wo sie dem Lernfortschritt dienen.

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung

Die Fachkonferenz hat im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen:

Siehe: Leistungsbewertungskonzept im Fach Mathematik Version 3.0
(Stand: 11.11.2019)

2.4 Lehr- und Lernmittel

Am Nicolaus-Cusanus-Gymnasium sind für die Qualifikationsphase die Lehrbücher Lambacher Schweizer Mathematik – Qualifikationsphase Grundkurs/ Leistungskurs aus dem Ernst Klett Verlag eingeführt.

Ab dem Schuljahr 2015/2016 werden diese Lehrwerke in den neuen auf den neuen Kernlehrplan Mathematik angestimmten Ausgaben eingesetzt:

- Lambacher Schweizer Mathematik – Qualifikationsphase Grundkurs, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2015, ISBN 978 3-12-735451-5
- Lambacher Schweizer Mathematik – Qualifikationsphase Leistungskurs/Grundkurs, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2015, ISBN 978 3-12-735441-6

3 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen

Die Fachkonferenz Mathematik hat sich im Rahmen des Schulprogramms und in Absprache mit den betreffenden Fachkonferenzen auf folgende, zentrale Schwerpunkte geeinigt.

Zusammenarbeit mit anderen Fächern

Der Mathematikunterricht in der Oberstufe ist in vielen Fällen auf reale oder realitätsnahe Kontexte bezogen. Insbesondere erfolgt eine Kooperation mit den naturwissenschaftlichen Fächern auf der Ebene einzelner Kontexte. An den in den vorangegangenen Kapiteln ausgewiesenen Stellen wird das Vorwissen aus diesen Kontexten aufgegriffen und durch die mathematische Betrachtungsweise neu eingeordnet. Der besonderen Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften soll dadurch Rechnung getragen werden, dass die Erkenntnis von Zusammenhängen mathematisiert werden kann.

Die Zusammenarbeit mit der Fachkonferenz Physik wirkt sich insbesondere auf gemeinsam verwendete Schreibweisen, aber auch auf die Bereitstellung von Experimentiermaterial aus, z.B. im Unterrichtsvorhaben „Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes (E-G1)“.

Im Bereich der mathematischen Modellierung von Sachverhalten werden die naturwissenschaftlichen Modelle als Grundlage für sinnvolle Modellannahmen verdeutlicht. Insbesondere im Bereich „Wachstum und Zerfall“ werden die zugrundeliegenden physikalischen bzw. biologischen Modelle als Argumentationsgrundlage verwendet und durch mathematikhaltige Argumentationen verifiziert.

Geplant ist eine Kooperation mit weiteren Fächern, in denen deskriptive Statistik und das Argumentieren mit Hypothesen im Sinne der beurteilenden Statistik eine Rolle spielt.

Der Mehrwert der grafikfähigen Taschenrechner soll fächerübergreifend durch die drei naturwissenschaftlichen Fachschaften genutzt werden

Im Fach Physik sind direkte Synergien in der Messwerterfassung und der Nutzung des GTR als Werkzeug zum Modellieren von Zusammenhängen möglich.

Wettbewerbe

Die Fachgruppe beabsichtigt im Rahmen der MINT-Ausrichtung der Schule Arbeitsgemeinschaft mit Themen und Aufgaben aus vergangenen Känguru-Wettbewerben und geeigneten Mathematik-Olympiaden einzurichten.

Die Teilnahme an den Wettbewerben wird den Schülerinnen und Schülern in Absprache mit der Stufenleitung ermöglicht.

Projekttage

Im Rahmen der jährlich am Nicolaus-Cusanus-Gymnasium stattfindenden Cusans-Woche bietet die Fachkonferenz Mathematik mindestens ein Projekt für Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe an, wenn dies in thematischer Weise möglich ist.

Exkursionen

Die Fachgruppe Mathematik beabsichtigt Exkursionen und außerschulische Lernorte in den Mathematikunterricht der Einführungsphase einzubeziehen. Dabei soll insbesondere eine Zusammenarbeit mit dem Mathematischen Institut der Universität Bonn und dem Hausdorff Center for Mathematics angestrebt werden.

Im Rahmen der Zusammenarbeit mit den Kooperationspartnern und im Rahmen des Netzwerkes MINT-EC ermöglicht das Nicolaus-Cusanus-Gymnasium in Abstimmung mit der Stufenleitung und dem Bereich Studien- und Berufsorientierung die Teilnahme an Exkursionen und Workshops unter thematischen oder berufsorientierenden Gesichtspunkten.

4 Qualitätssicherung und Evaluation

Durch parallele Klausuren (vgl. 2.3) in den Grundkursen, durch Diskussion der Aufgabenstellung von Klausuren in Fachdienstbesprechungen und eine regelmäßige Erörterung der Ergebnisse von Leistungsüberprüfungen wird ein hohes Maß an fachlicher Qualitätssicherung erreicht.

In der Fachkonferenz werden Möglichkeiten der Weiterentwicklung der Zielsetzungen und Methoden des Unterrichts angeregt, diskutiert und Veränderungen im schulinternen Curriculum abgestimmt. Von der Fachgruppe Mathematik erkannte Fortbildungsnotwendigkeiten werden der Fortbildungskoordinatorin oder dem Fortbildungskoordinator benannt und eine Umsetzung beantragt.

Weitergehende, insbesondere fachliche, fachdidaktische oder methodische Fortbildungen werden bedarfsgerecht von den Lehrkräften wahrgenommen und die Inhalte der Fortbildungen der Fachgruppe vorgestellt und gemeinsam zur Unterrichtsentwicklung genutzt.